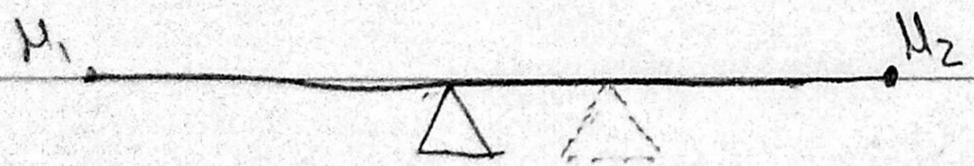
23/02/16

Ροπές Αδράνειας

Οι ροπές που έχουμε ήδη ορίσει δίνουν πληροφορία μόνο για το σημείο ισορροπίας, δηλ το κέντρο μάζας. Χρειάζεται να γενικεύσουμε για να μελετήσουμε το σώμα εκτός ισορροπίας

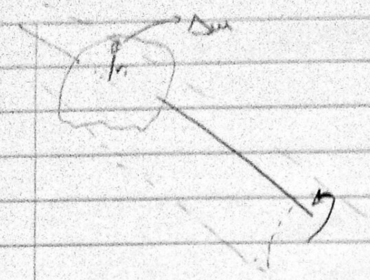
Παράδειγμα



$m_1 \neq m_2$ σε τυχαίο σημείο στήριξης (εκτός κέντρου μάζας) δεν ισορροπεί

Χρειάζεται να απαντήσουμε σε 2 ερωτήματα

1) Πόση ενέργεια χρειάζεται για να περιστρέψουμε το σώμα
2) Πως μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και να αποθηκεύσουμε αυτή την ενέργεια



Η στοιχειώδης μάζα Δm απέχει από τον άξονα περιστροφής r_i και έχει ταχύτητα περιστροφής $\frac{d\theta}{dt} = \omega \, (= \dot{\theta})$ (γωνιακή ταχύτητα)

Η ταχύτητα του κέντρου μάζας είναι $\frac{d}{dt}S$, όπου S το τόξο που διανύθηκε

Η ενέργεια λόγω περιστροφής είναι $E_i = 1/2 \, \Delta m \, v^2$

$v = \frac{dS}{dt} = \frac{d}{dt}(r_i \theta) = r_i \frac{d\theta}{dt} = r_i \omega$, δηλαδή $E_i = \frac{1}{2} \Delta m \, r_i^2 \omega^2$

Η συνολική ενέργεια θα είναι $E = \sum_i E_i$ η σε συνεχή κατανομή μάζας

$E = \lim_{i \to \infty} \sum_i E_i \Rightarrow E = \int \frac{1}{2} \Delta m \, r_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \int r^2 dm$

Ορίζουμε τη ποσότητα $I = \int r^2 dm$ ως ροπή αδράνειας ή δεύτερη ροπή του σώματος και γράφουμε τη συνολική ενέργεια ως $E = \frac{1}{2} I \omega^2$

Φυσική σημασία

1) Για να περιστρέψουμε ένα μηχανικό άξονα με γωνιακή ταχύτητα ω, χρειάζομαι ενέργεια $E = 1/2 \, I \omega^2$. Αντίστοιχα τόση ενέργεια θα χρειαστώ για να σταματήσω έναν περιστρεφόμενο άξονα με ταχύτητα ω.

2) Η ροπή αδράνειας I είναι το περιστροφικό ανάλογο της μάζας δηλαδή αν

$$E = \frac{1}{2} m v^2$$
$$\updownarrow \quad \updownarrow$$
$$E = \frac{1}{2} I \omega^2$$

, που δίνει πληροφορία όχι μόνο για τη μάζα του σώματος, αλλά και τον τρόπο κατανομής της.

Ορίζουμε τις ροπές αδράνειας ή δεύτερες ροπές ενός σώματος ως προς τον άξονα x: $I_x = \iint_R y^2 \underbrace{\rho(x,y)\, dA}_{dm}$ και ως προς τον άξονα y: $I_y = \iint_R x^2 \underbrace{\rho(x,y)\, dA}_{dm}$

Η ροπή ως προς την αρχή των αξόνων (δηλ ως προς σημείο) είναι:

$$I_O = \iint_R (x^2+y^2)\,\rho(x,y)\,dA$$

Συνήθως η ροπή I_O καλείται και πολική ροπή.

Γενικά η ροπή αδράνειας ως προς μία ευθεία L είναι:

$$I_L = \iint_R r^2 \rho(x,y)\,dA$$, όπου r η απόσταση από την ευθεία

Προφανώς, $I_O = I_x + I_y$. Η σχέση αυτή καλείται θεώρημα των καθέτων αξόνων.

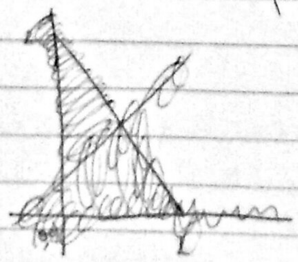
Χρησιμοποιώντας τις ροπές αδράνειας, ορίζω τις ακτίνες αδράνειας που δηλώνουν την απόσταση από τους αντίστοιχους άξονες, που μπορούμε να συγκεντρώσουμε τη συνολική μάζα του σώματος ώστε να έχουμε την ίδια ροπή αδράνειας. Δηλαδή να αντιστοιχίσουμε όλο το σώμα σε ένα υλικό σημείο.

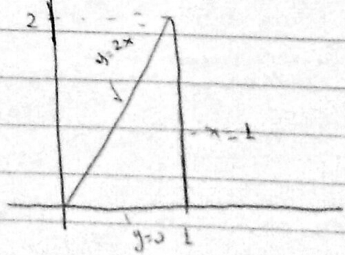
Ακτίνα αδράνειας

$$\left.\begin{aligned} I_x &= m R_x^2 \\ I_y &= m R_y^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} R_x &= \sqrt{I_x/m} \\ R_y &= \sqrt{I_y/m} \end{aligned}$$

Παράδειγμα

Να βρεθεί το κέντρο μάζας ενός τριγώνου, με κορυφές τα σημεία (0,0), (1,0), (1,2), πυκνότητα μάζας $\rho = 6x+6y+6$, και να βρεθούν και οι αντίστοιχες ροπές αδράνειας I_x, I_y, I_O.





$$m = \iint_R \rho(x,y)\,dA = \int_0^1\int_0^{2x} (6x+6y+6)\,dy\,dx = 14 \quad \left(= \int_0^2\int_{y/2}^1 (6x+6y+6)\,dx\,dy\right)$$

$$M_x = \int_0^1\int_0^{2x} y(6x+6y+6)\,dy\,dx = 11, \quad M_y = \int_0^1\int_0^{2x} x(6x+6y+6)\,dy\,dx = 10$$

$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = 10/14, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{m} = 11/14$

$$I_x = \int_0^1 \int_0^{2x} y^2 (6x+6y+6)\,dy\,dx = 12$$

$$I_y = \int_0^1 \int_0^{2x} x^2 (6x+6y+6)\,dy\,dx = 39/5$$

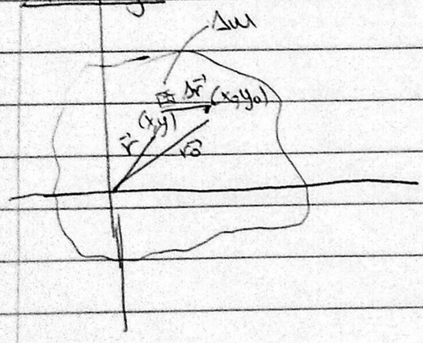
$$I_0 = I_x + I_y = \frac{99}{5}, \quad R_x = \sqrt{12/14}, \quad R_y = \sqrt{(39/5)/14}$$

Θεώρημα των παραλλήλων αξόνων

Το κεντροειδές μιας επίπεδης πλάκας βρίσκεται στην αρχή των αξόνων και η πλάκα έχει συνολική μάζα m. Η ροπή αδράνειας γύρω από άξονα κάθετο στη πλάκα στο σημείο (x_0, y_0) είναι

$$I = I_x + I_y + m(x_0^2 + y_0^2)$$

Απόδειξη



Γνωρίζουμε ότι το κεντροειδές είναι στο $(0,0)$

Αυτό θα πει ότι: $\left\{\begin{array}{l} \bar{x} = \frac{M_y}{m} = 0 \\ \bar{y} = \frac{M_x}{m} = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} M_x = 0 \\ M_y = 0 \end{array}\right.$

Από τον ορισμό $I = \iint_R \Delta r^2 \rho\,dA =$

$$= \iint_R \left[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2\right] \rho\,dA =$$

$$= \iint_R (x^2 + x_0^2 - 2x_0 x + y^2 + y_0^2 - 2y_0 y)\rho\,dA$$

$$= \iint_R x^2\rho\,dA + x_0^2 \iint_R \rho\,dA - 2x_0 \iint_R x\rho\,dA + \iint_R y^2\rho\,dA + y_0^2 \iint_R \rho\,dA - 2y_0 \iint_R y\rho\,dA$$

$$= I_x + x_0^2 m - 2x_0 \cancel{M_y}^{\,0} + I_y + y_0^2 m - 2y_0 \cancel{M_x}^{\,0}$$

$$= I_x + I_y + m(x_0^2 + y_0^2)$$

Γενικά μελετάμε σώματα σε 3 διαστάσεις. Οι ορισμοί παραμένουν οι ίδιοι, με διαφορά ότι τα διπλά ολοκληρώματα μετατρέπονται σε τριπλά. Θα βλέπουμε πλέον για όγκους

<u>Όγκος</u>: $V = \iiint_D dV$

<u>Μάζα</u>: $m = \iiint_D \rho(x,y,z)\, dV$

<u>Ροπές</u>: $M_{yz} = \iiint_D x \rho\, dV$

$M_{xz} = \iiint_D y \rho\, dV$

$M_{xy} = \iiint_D z \rho\, dV$

<u>Κέντρο μάζας</u>: $\bar{x} = \frac{M_{yz}}{m}$, $\bar{y} = \frac{M_{xz}}{m}$, $\bar{z} = \frac{M_{xy}}{m}$

<u>Ροπές αδράνειας</u>: $I_x = \iiint_D (y^2+z^2)\rho\, dV$

$I_y = \iiint_D (x^2+z^2)\rho\, dV$

$I_z = \iiint_D (x^2+y^2)\rho\, dV$

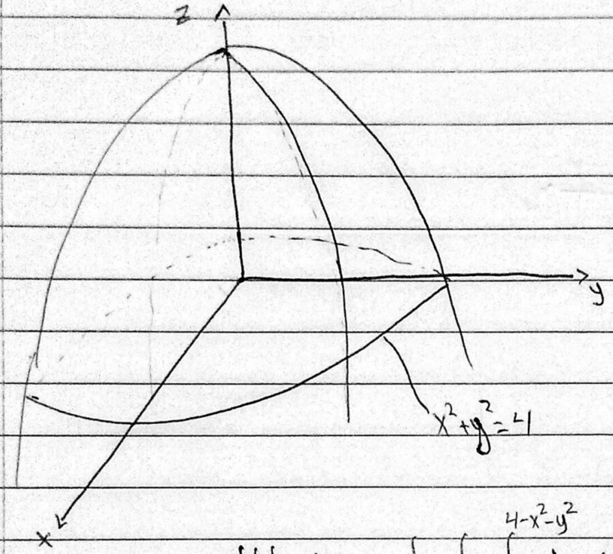
$I_L = \iiint_D r^2 \rho\, dV$, r η απόσταση από την L

<u>Παρατήρηση</u>

Ακόμα και για σώματα ή σύρματα που γενικά θεωρούνται μονοδιάστατα (πχ ράβδος, ελατήριο) θα τα θεωρούμε ως σώματα στο χώρο και θα αντικαθιστούμε τα ολοκληρώματα με επικαμπύλια

Παράδειγμα 1

Να βρεθεί το κέντρο μάζας στερεού σταθερής πυκνότητας, που φράσσεται από τον κυκλικό δίσκο : $\{x^2+y^2=4 , z=0\}$ και το παραβολοειδές $z=4-x^2-y^2$



$$m=\iiint_D \rho dV=\rho \iint \int_0^{4-x^2-y^2} dz\, dA = \rho \iint_R (4-x^2-y^2)\, dA$$

$$=\rho \int_0^{2\pi} \int_0^{2} (4-r^2) r\, dr d\theta$$ (χρησιμοποιώ πολικές συντεταγμένες)

$$= 8\pi\rho$$

$M_{xy}=\iiint_D z\rho dV$ ~ θα πάει $z^2/2$

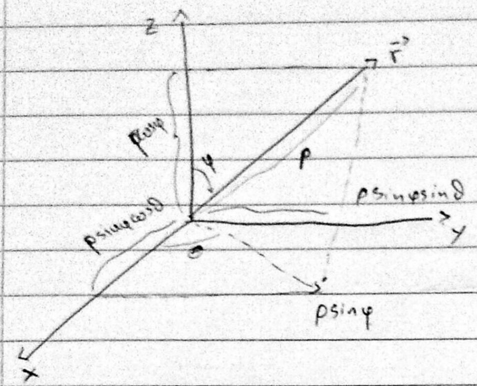
$M_{xz}=\iiint_D y\rho dV$ ~ $y=r\sin\theta$

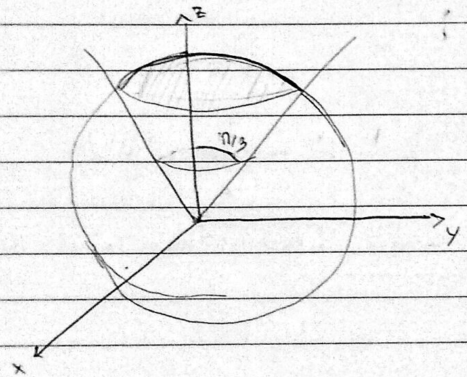
$M_{yz}=\iiint_D x\rho dV$ ~ $x=r\cos\theta$

$$\bar{z}=\frac{M_{xy}}{m}=\frac{32\pi\rho}{3}$$

Παράδειγμα 9

Ένα παγωτό χωνάκι είναι ένας κώνος, $\varphi = \pi/3$ που αποκόπτει τη μοναδιαία σφαίρα





$$m = \iiint_D d\, dV \qquad , d: \text{η πυκνότητα}$$

$$= d \iiint_D dV = d \int_0^{\pi/3} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \rho^2 \sin\varphi \, d\rho \, d\theta \, d\varphi$$

$x = \rho \cos\theta \sin\varphi$

$y = \rho \sin\theta \sin\varphi$

$z = \rho \cos\varphi$

$\varphi = \pi/3$

$$= d \int_{-\sqrt{3}/2}^{\sqrt{3}/2} \int_{-\sqrt{\frac{3}{4}-x^2}}^{\sqrt{\frac{3}{4}-x^2}} \int_{\sqrt{\frac{x^2+y^2}{3}}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dz \, dy \, dx$$

$x = \rho \cos\theta \frac{\sqrt{3}}{2}$	$x^2+y^2 = \frac{3}{4}\rho^2 \Rightarrow$
$y = \rho \sin\theta \frac{\sqrt{3}}{2}$	$x^2+y^2 = \frac{3}{4}$
$z = \rho \frac{1}{2} \Rightarrow \rho = 2z$	$z = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{3}}$

$\rho = 1, \ \varphi = \pi/3 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta$

$y = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta$

$x^2+y^2 = 3/4$

Άσκηση

Να βρεθεί η ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα z στερεού σώματος σταθερής πυκνότητας και σχήματος που περιγράφεται από τη καμπύλη $\rho = 1 - \cos\varphi$